Φροντιστήριο 1 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, για κάθε άρτιο αριθμό *n* μεγαλύτερο από 2, υπάρχει 3-κανονικό (κάθε κόμβος έχει βαθμό 3) μη κατευθυνόμενο γράφημα με *n* κόμβους.

Λύση

Έστω *n* αυθαίρετος άρτιος αριθμός, *n*≥4. Αφού ο n είναι άρτιος, μπορούμε να τον γράψουμε ως *n* = 2*k*. Κατασκευάζουμε γράφημα G = (V,E) με *n* κόμβους ως εξής:

V = {1,2,3,…,2*k*}

E = $\{(1,2),(2,3),\ldots,(2k-1,k),(2k,1)\} \cup \{(i,k+i) | 1 \leq i \leq k\}$

Στο γράφημα αυτό οι κόμβοι έχουν τοποθετηθεί διαδοχικά κατά μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου και επιπλέον συνδέθηκαν μέσω «ακτίνων» με τους αντιδιαμετρικούς τους κόμβους. Προφανώς, το γράφημα είναι 3-κανονικό αφού κάθε κόμβος συνδέεται με τον προηγούμενο του κόμβο, τον επόμενο του κόμβο και τον κόμβο που βρίσκεται απέναντί του.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

Ξεκινούμε αποδεικνύοντας το πιο κάτω βοηθητικό λήμμα.

<u>Λήμμα:</u> Για κάθε ζεύγος περιττών ακέραιων *m* και *n* το γινόμενο *mn* είναι περιττό.

<u>Απόδειξη:</u> Αφού οι δύο αριθμοί είναι περιττοί μπορούν να γραφτούν ως $m = 2a+1$ και $n = 2b+1$. Άρα

$$m \cdot n = (2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$$

Επομένως το γινόμενο αυτό είναι περιττό.

Επιστρέφουμε στο ζητούμενο της άσκησης. Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν ακέραιοι X και Y τέτοιοι ώστε $\sqrt{2} = \frac{X}{Y}$. Έστω x και y οι ακέραιοι που προκύπτουν από τους X και Y μετά από όλες τις απλοποιήσεις που δυνατόν να είναι εφικτές στον λόγο $\frac{X}{Y}$. Προφανώς ισχύει και πάλι ότι $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ και επιπλέον

$$\sqrt{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow 2 = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow 2y^2 = x^2 \qquad (*)$$

Επομένως ο αριθμός x^2 είναι άρτιος. Αυτό συνεπάγεται ότι και ο *x* είναι άρτιος. (Διότι αν ήταν περιττός τότε, από το Λήμμα πιο πάνω, και ο x^2 θα ήταν περιττός). Κατά συνέπεια, ο x μπορεί να γραφτεί ως $x = 2k$ όπου k κάποιος ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην ισότητα (*), παίρνουμε

$$2y^2 = x^2 \Rightarrow 2y^2 = 4k^2 \Rightarrow y^2 = 2k^2$$

Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο y^2 είναι άρτιος. Όπως και πιο πάνω, ισχύει ότι και ο y είναι άρτιος.

Άρα οι αριθμοί x και y είναι άρτιοι που σημαίνει ότι έχουν κοινό παράγοντα τον αριθμό 2. Αυτό όμως μας οδηγεί σε άτοπο αφού υποθέσαμε ότι οι δύο αριθμοί δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

Κατά συνέπεια, η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη και το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Άσκηση 3</u>

Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο *n*≥0, ο αριθμός $\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

<u>Λύση</u>

Απόδειξη με επαγωγή στο *n.*

Βασική Περίπτωση: Για *n*=0 έχουμε $\phi(0) = 4^{2\cdot 0+1} + 3^{2\cdot 0+1} = 4 + 3 = 7$. Επομένως το φ(0) είναι πολλαπλάσιο του 7 και το ζητούμενο έπεται.

Υπόθεση της Επαγωγής: Υποθέτουμε ότι για τον ακέραιο *k* ο αριθμός $\phi(k) = 4^{2k+1} + 3^{2k+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Έστω $\phi(k) = 4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 7a$ για κάποιο ακέραιο *α.*

Βήμα της Επαγωγής: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\phi(k+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi(k+1) &= 4^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1} = 4^{2k+1+2} + 3^{2k+1+2} = 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3^2 \cdot 3^{2k+1} \\
&= (9+7) \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 3^{2k+1} = 7 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 3^{2k+1} \\
&= 7 \cdot 4^{2k+1} + 9(4^{2k+1} + 3^{2k+1}) = 7 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot \phi(k) \\
&= \{\text{Υπόθεση της Επαγωγής}\} \\
&\quad 7 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 7a \\
&= 7(4^{2k+1} + 9a)
\end{aligned}$$

Επομένως ο $\phi(k+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Άσκηση 4</u>

Υποθέστε ότι το σύνολο L είναι το μικρότερο σύνολο επί του αλφαβήτου {0,1} τα στοιχεία του οποίου παράγονται από τους πιο κάτω κανόνες:

(1) $\varepsilon \in$ L
(2) Αν u $\in$ L τότε 0u1 $\in$ L

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$, η λέξη $0^n1^n \in L$.

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε λέξη $w \in L$ ισχύει ότι $w = 0^k1^k$ για κάποιο $k \geq 0$.

<u>Λύση</u>

(α) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή πάνω στο n.

<u>Βάση της Επαγωγής</u>: Αν $n = 0$, τότε $0^01^0=ε$. Από τον κανόνα (1), η λέξη ε ανήκει στη γλώσσα και το ζητούμενο έπεται.

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Ας υποθέσουμε ότι η λέξη $0^k1^k \in L$.

<u>Επαγωγικό Βήμα</u> Πρέπει να δείξουμε ότι η λέξη $0^{k+1}1^{k+1} \in L$. Με βάση την υπόθεση της επαγωγής $0^k1^k \in L$. Επομένως, από τον κανόνα (2) έχουμε ότι $00^k1^k1 \in L$. Επομένως $0^{k+1}1^{k+1} \in L$ και το ζητούμενο έπεται.

(β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε λέξη $w \in L$, ισχύει ότι $w = 0^k1^k$ για κάποιο $k \geq 0$.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή πάνω στο n, το πλήθος των κανόνων που απαιτήθηκαν για την κατασκευή της w.

<u>Βάση της Επαγωγής</u>: Αν $n = 1$, τότε χρησιμοποιήθηκε μόνο ένας κανόνας. Ο κανόνας αυτός πρέπει να είναι ο πρώτος κανόνας και η λέξη πρέπει να είναι η ε. Αφού $ε = 0^01^0$, το ζητούμενο έπεται. (Σημείωση: αφού η γλώσσα L αποτελεί το μικρότερο σύνολο που παράγεται από τους κανόνες (1) και (2), είναι αδύνατο να χρησιμοποιήθηκε μόνο ο δεύτερος κανόνας, γιατί αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιας λέξης u που υπάρχει στο L χωρίς τη χρήση κάποιου κανόνα, και σε αυτή την περίπτωση το L δεν είναι το μικρότερο δυνατό σύνολο).

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Ας υποθέσουμε ότι οποιαδήποτε λέξη έχει παραχθεί με τη χρήση m κανόνων έχει τη μορφή 0^k1^k για κάποιο $k \geq 0$.

<u>Επαγωγικό Βήμα</u> Πρέπει να δείξουμε ότι αν μια λέξη έχει παραχθεί με τη χρήση m+1 κανόνων έχει τη μορφή 0^p1^p για κάποιο $p \geq 0$. Από την υπόθεση της επαγωγής, μετά από την εφαρμογή των m πρώτων κανόνων η λέξη έχει τη μορφή 0^k1^k. Αν εφαρμόσουμε ακόμα ένα κανόνα, τότε ο κανόνας αυτό πρέπει να είναι ο κανόνας (2) Επομένως, η λέξη που θα παραχθεί θα είναι η $00^k1^k1 = 0^{k+1}1^{k+1} \in L$ και το ζητούμενο έπεται.