Διάλεξη 22: Ελάχιστα Γεννητορικά Δένδρα Αλγόριθμος Prim

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

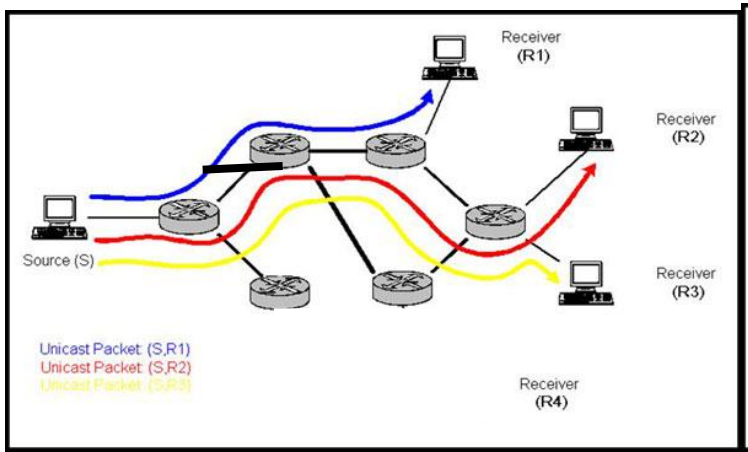
Ελάχιστα Γεννητορικά Δένδρα (ΕΓΔ) – Minimum Spanning Trees

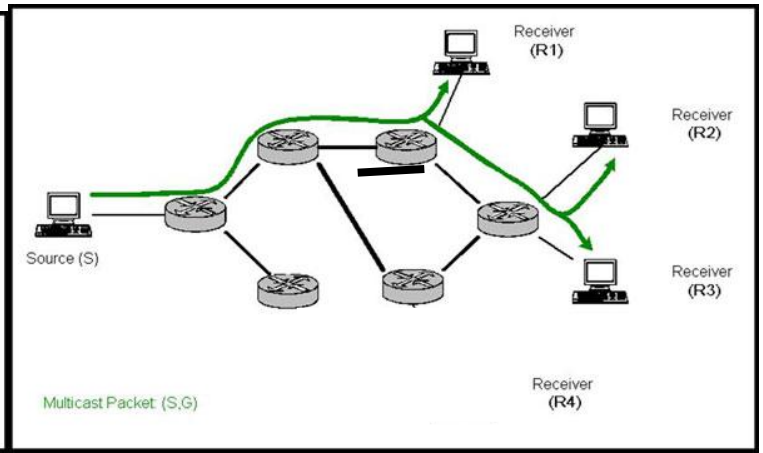
Ο αλγόριθμος του Prim για εύρεση ΕΓΔ σε γράφους

Διδάσκων: Δημήτρης Ζεϊναλιπούρ

Ελάχιστα Γεννητορικά Δένδρα (ΕΓΔ)
Το πρόβλημα

- Υποθέστε ότι έχουμε το weighted γράφο G(V,E), ο οποίος εκφράζει τις συνδέσεις σε ένα δίκτυο (το βάρος κάθε ακμής εκφράζει κάποιο κόστος – π.χ. καθυστέρηση μετάδοσης).
- Επίσης υποθέστε ότι θέλουμε να στείλουμε από ένα κόμβο (server) ένα video stream στις υπόλοιπες τερματικές κορυφές του γράφου.
- Ένας τρόπος θα ήταν να στείλουμε ένα video stream ανά κορυφή παραλήπτη (unicast)
- …Όμως αυτό θα ήταν πολύ ακριβό.
- Ιδανικά θα θέλαμε να φτιάξουμε ένα μονοπάτι (δένδρο) προς όλους τους τερματικούς κόμβους έτσι ώστε το συνολικό άθροισμα των ακμών να είναι ελάχιστο.
- Ένα τέτοιο δένδρο θα μας επέτρεπε να στείλουμε την ταινία προς όλους με το ελάχιστο κόστος. Σήμερα θα μελετήσουμε τέτοια Ελάχιστο Γεννητορικά Δένδρα

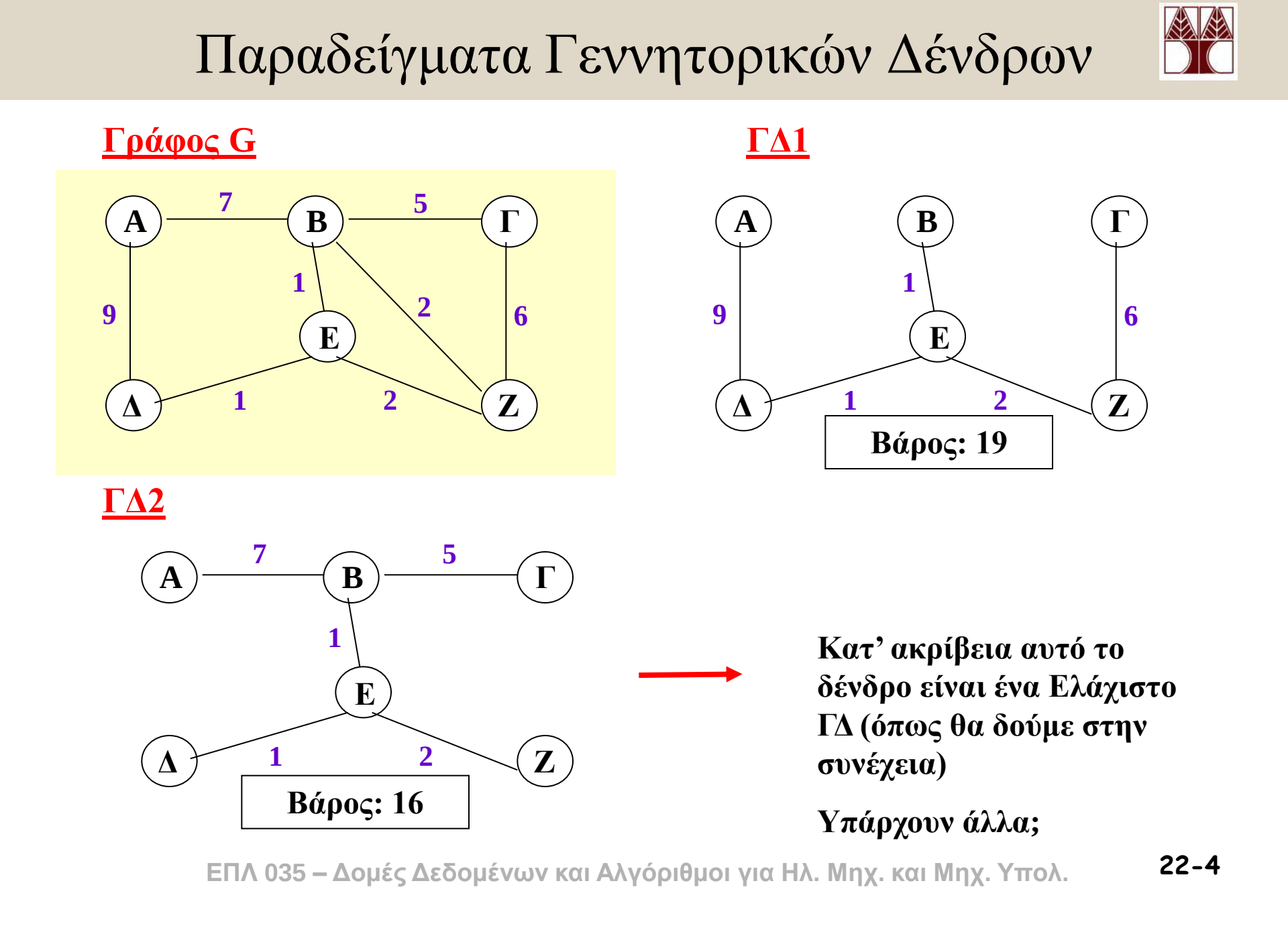




Ελάχιστα Γεννητορικά Δένδρα (ΕΓΔ)

- Έστω ένας **μη-κατευθυνόμενος** γράφος με βάρη, G(V,E).
- **Γεννητορικό δένδρο (spanning tree, ΓΔ)** του **G** ονομάζουμε κάθε **δένδρο T** που περιέχει όλους τους κόμβους του **G** και κάθε ακμή του οποίου είναι και ακμή του **G.**
- Σε ένα ΓΔ, όλες οι κορυφές '**καλύπτονται**', γι' αυτό το δένδρο ονομάζεται και δένδρο σκελετός (**spanning tree**: the tree spans all the vertices)
- Ένα γεννητορικό δένδρο γράφου με **n** κορυφές έχει **n-1** ακμές.
- **Βάρος ενός ΓΔ** είναι το άθροισμα των βαρών όλων των ακμών του δένδρου.
- **Ελάχιστο ΓΔ (ΕΓΔ)** είναι το ΓΔ με το μικρότερο βάρος. Ένας γράφος δυνατό να έχει περισσότερα από ένα ΕΓΔ. (Εάν ο γράφος δεν είχε βάρη τότε οποιονδήποτε δένδρο που ενώνει όλες τις ακμές θα ήταν ΕΓΔ)
- Το πρόβλημα εύρεσης ενός ΓΔ μπορεί να εκφραστεί και για κατευθυνόμενους γράφους αλλά είναι κάπως δυσκολότερη η υλοποίηση

Παραδείγματα Γεννητορικών Δένδρων



Γράφος G

ΓΔ1

ΓΔ2

Κατ' ακρίβεια αυτό το δένδρο είναι ένα Ελάχιστο ΓΔ (όπως θα δούμε στην συνέχεια)

Υπάρχουν άλλα;

Ιδιότητες ΕΓΔ

- Υποθέτουμε στην συνέχεια ότι οι γράφοι που μελετάμε είναι **συνεκτικοί** (δηλαδή υπάρχει τουλάχιστο μια διαδρομή μεταξύ όλων των κορυφών).

- Δεν κάνει νόημα να βρούμε ένα ΕΓΔ ενός μη-συνεκτικού γράφου…γιατί ο ορισμός του ΕΓΔ προϋποθέτει ότι το δένδρο καλύπτει όλες τις κορυφές.

- Η εύρεση ΕΓΔ είναι γνωστό και βαθιά μελετημένο πρόβλημα στην επεξεργασία γράφων. Έχει ποικίλες εφαρμογές.

Ο αλγόριθμός του Prim

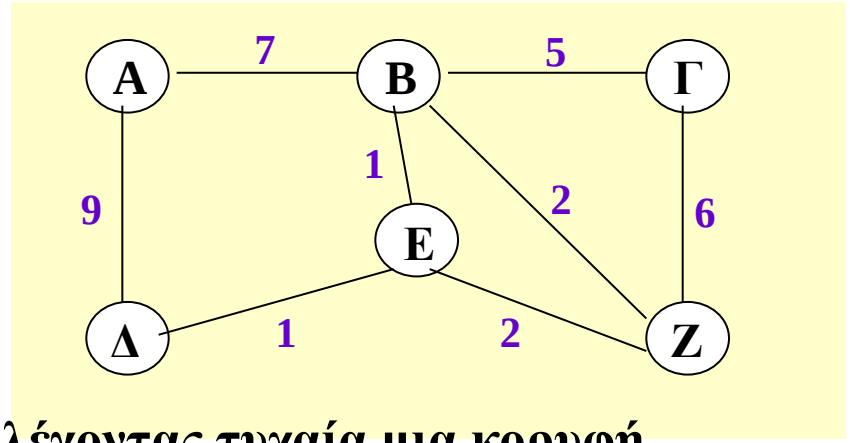
- Αρχικά το δένδρο περιέχει ακριβώς μία κορυφή, η οποία επιλέγεται τυχαία.
- Για να κτίσουμε το δένδρο, σε κάθε βήμα συνδέουμε ακόμα μια κορυφή στο παρόν δένδρο με την επιλογή και εισαγωγή μιας καινούριας ακμής (από τις ακμές του γράφου).
- Πως μπορούμε να επιλέξουμε την κατάλληλη ακμή;
- Στην περίπτωση αυτού του αλγόριθμου, αν **S** είναι το ***σύνολο των κορυφών του παρόντος δένδρου***, επιλέγουμε

  1. **Την ακμή με το μικρότερο βάρος,**
  2. **Την ακμή η οποία μπορεί να μεγαλώσει το δένδρο κατά ένα κόμβο**
  3. **Την ακμή η οποία δεν θα δημιουργήσει κάποιο κύκλο**

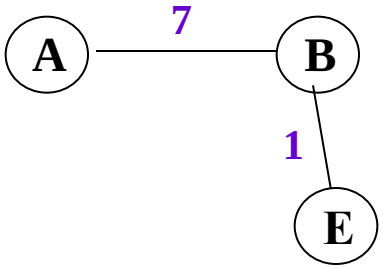
- Ο αλγόριθμος του Prim είναι ένας **Άπληστος Αλγόριθμος (Greedy Algorithm).** Σε κάθε βήμα κάνει την κίνηση που ικανοποιεί όλες τις συνθήκες και έχει το πιο λίγο κόστος.

Παράδειγμα Εκτέλεσης

Γράφος G

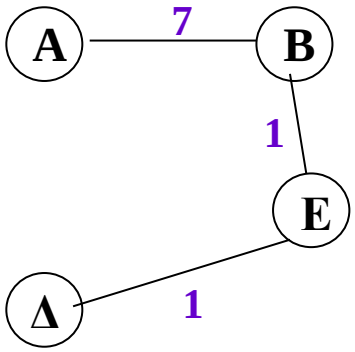


Ξεκινούμε διαλέγοντας τυχαία μια κορυφή

		Κορυφή	Κόστος Μετάβασης στην γειτονική κορυφή
1:		A	B : 7, Δ : 9
2:		A	Δ : 9
		B	Γ : 5, E : 1, Z : 2
3:		A	Δ : 9
		B	Γ : 5, Z : 2
		E	Δ : 1, Z : 2

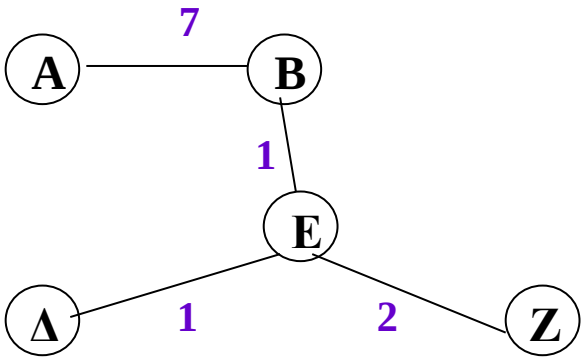
Παράδειγμα Εκτέλεσης (συν.)

4:



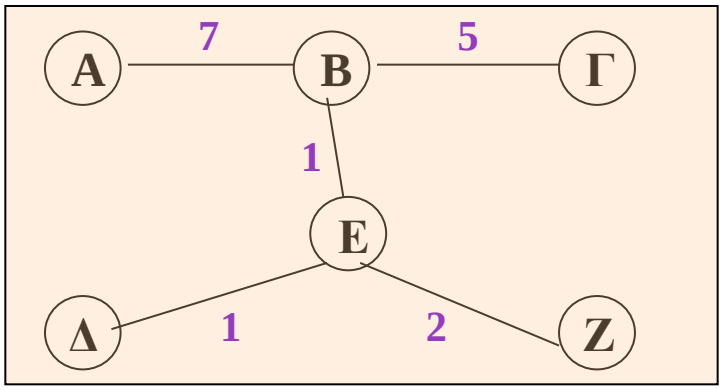
B	Γ : 5, Z : 2
E	Z : 2

5:

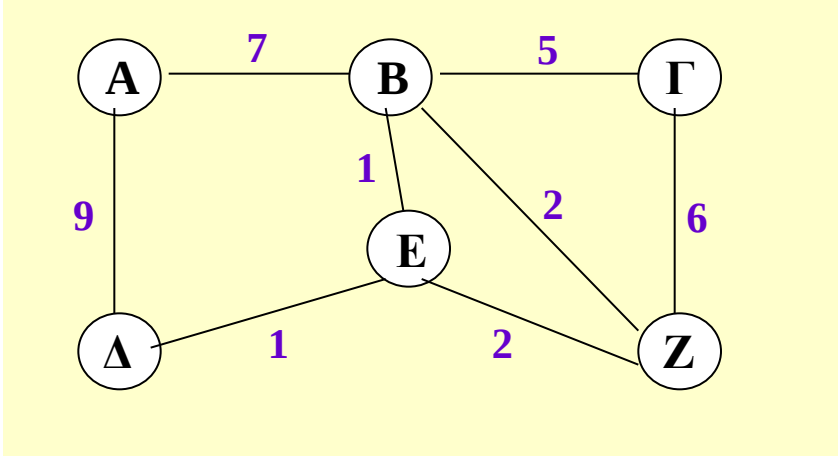


B	Γ : 5
Z	Γ : 6

6:



Ελάχιστο Γεννητορικό Δένδρο (ΕΓΔ)



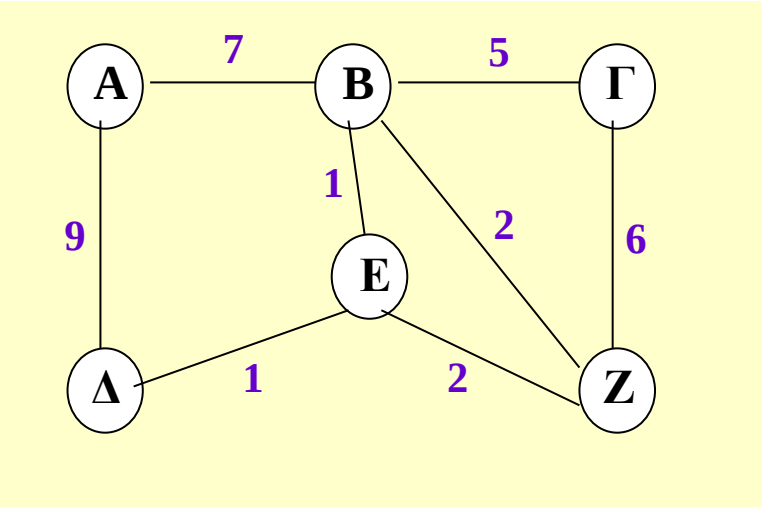
Ο Αρχικός Γράφος

Υλοποίηση Αλγόριθμου Prim

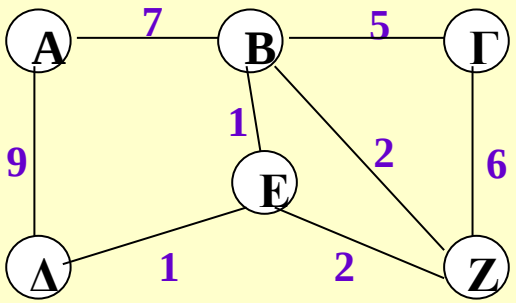
- Για να υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο Prim θα χρησιμοποιήσουμε παράλληλους πίνακες
  - A) visited[n] : Κορυφές από τις οποίες περάσαμε.
  - B) closest[n] : Η κοντινότερη κορυφή κάθε κόμβου στο δένδρο (μια δεδομένη στιγμή)
  - C) distance[n] : Η απόσταση του κάθε επί μέρους κόμβου στο (B)

Αρχικοποίηση

	A	B	Γ	Δ	E	Z
visited:	0	0	0	0	0	0
closest:	0	0	0	0	0	0
distance:	∞	∞	∞	∞	∞	∞

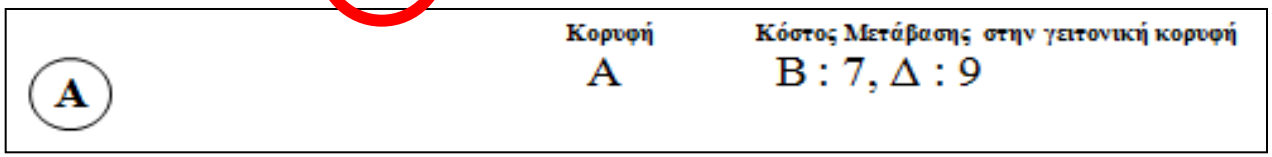


Υλοποίηση Αλγόριθμου Prim



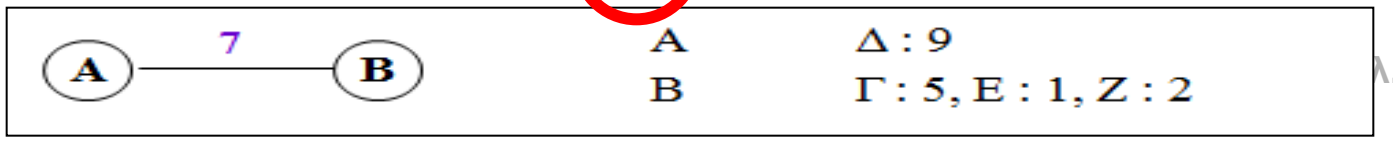
- Μέτα την εισαγωγή του **A** στο Δένδρο

	A	B	Γ	Δ	E	Z
visited:	1	0	0	0	0	0
closest:	0	A	0	A	0	0
distance:	∞	7	∞	9	∞	∞



- Μέτα την εισαγωγή του **B** στο Δένδρο

	A	B	Γ	Δ	E	Z
visited:	1	1	0	0	0	0
closest:	0	A	B	A	B	B
distance:	∞	7	5	9	1	2

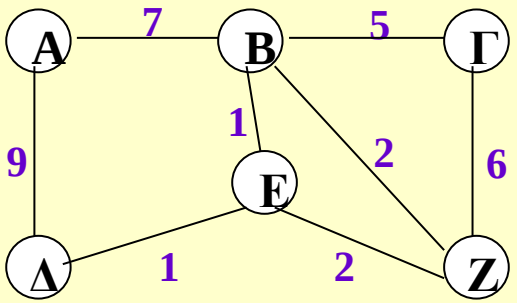


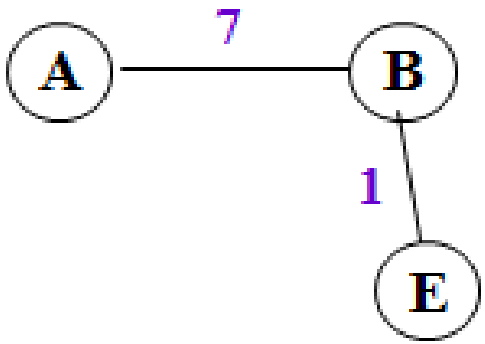
Προσπαθούμε να μεγαλώσουμε το δένδρο με άπληστο τρόπο (διατηρώντας το συνδεδεμένο)

Υλοποίηση Αλγόριθμου Prim

- Μέτα την εισαγωγή του **E** στο Δένδρο

	A	B	Γ	Δ	E	Z
visited:	1	1	0	0	1	0
closest:	0	A	B	E	B	B
distance:	∞	7	5	1	1	2





Δυο τρόποι να πάμε στο Z, διατηρούμε τον ένα.

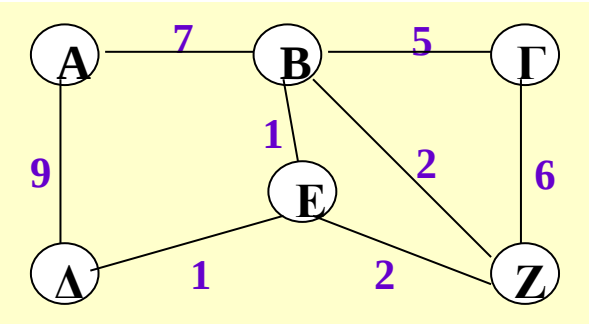
A	Δ : 9
B	Γ : 5, Z : 2
E	Δ : 1, Z : 2

• • •

Η Υλοποίηση του Αλγόριθμου Prim

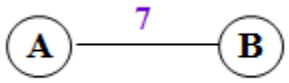
```
Prim(graph G){
int visited[n]={}; // Κορυφές που προστέθηκαν στο δένδρο (Αρχικά όλα "0")
int closest[n]={}; // «Πιο Κοντινός Γείτονας» για κάθε i: Αρχικά κανένας
int distance[n]=∞, // Απόσταση από «Κοντιν. Γείτονα» για κάθε i: Αρχικά άπειρο
Tree = {};   // Το ΕΓΔ που θέλουμε να κτίσουμε (περιέχει ακμές (α,β))
// επιλογή αρχικής κορυφής
Διάλεξε τυχαία κορυφή v;
visited[v] = 1;      // Τώρα το v ανήκει στο δένδρο

για κάθε κορυφή v {
    // ενημέρωση πινάκων distance & closest
    για κάθε w γείτονα του v {
       if (weight(v,w) < distance[w]) {
          distance[w] = weight(v,w); // απόσταση κοντινότερου
          closest[w] = v; // ταυτότητα κοντινότερου
       }
    }
    // εύρεση επόμενης κορυφής με μικρότερη απόσταση)
    v = minVertex(visited, distance);
    visited[v]=1;                          // επιλογή κόμβου
    Tree = Tree ∪ {(closest[v],v)}; //προσθήκη ακμής
 }
}
```

weight(a,b) : βάρος ακμής a-b



Η βοηθητική συνάρτηση **minVertex**

- Η βοηθητική διαδικασία minVertex βρίσκει μεταξύ όλων των κορυφών που δεν προστέθηκαν στο MST (Minimum Spanning Tree) την πιο κοντινή κορυφή. Δηλαδή:



A Δ : 9
B Γ : 5, E : 1, Z : 2

```
vertex minVertex(int visited[], int distance[]){
   min = ∞;
   for (i=0; i<|V|; i++) {
     if (visited[i] == 1) continue; // skip nodes already in MST
     if (distance[i] < distance[min]) min = i;
    }
   return min;        // Return the minimum among all distances
}
```

	A	B	Γ	Δ	E	Z
visited:	1	1	0	0	0	0
closest:	0	A	B	A	B	B
distance:	∞	7	5	9	1	2

Επόμενη Επιλογή

Ανάλυση Χρόνου Εκτέλεσης

- Η διαδικασία **minVertex** απαιτεί χρόνο O(|V|), όπου |V| είναι ο αριθμός των κορυφών του γράφου.
- Ο χρόνος εκτέλεσης του βρόχου της εντολής **`while`** στον αλγόριθμο Prim είναι και αυτός O(|V|). (Και για υλοποίηση με πίνακα γειτνίασης και για υλοποίηση με λίστα γειτνίασης.)
- **Άρα ο ολικός χρόνος εκτέλεσης είναι Θ(|V|²).**
- Μπορούμε να βελτιώσουμε τον αλγόριθμο;
- Ναι με την χρήση σωρών (μια ειδική μορφή δυαδικού δένδρου)
- Με την χρήση σωρών ο αλγόριθμος μπορεί να υλοποιηθεί σε O(|E|·log |E|), όπου E οι ακμές του γράφου.
- Ωστόσο δεν θα μελετήσουμε αυτή την υλοποίηση